大域的逆分岐理論について (関数方程式のダイナミクスと数理モデル)

AUTHOR(S):

上村, 豊

数理解析研究所講究録
第 1637 巻 2009 年 87-99

大域的逆分岐理論について

東京海洋大学海洋科学部 上村 豊 (Yutaka Kamimura)
Department of Ocean Sciences,
Tokyo University of Marine Science and Technology

非線形 Sturm-Liouville 問題の分岐曲線から非線形項を定める問題は Kamimura [5], Iwasaki-Kamimura [2, 4] で扱われたが，大域的な結果を得るには至っていない．非線形項の正値性を仮定した，よりシンプルな形の非線形 Sturm-Liouville 問題に対しては，与えられた正値の第 1 分岐を実現する非線形項の大域的な存在，一意性，第 1 分岐に対する連続依存性を保証する結果（[8]）が得られたので，この結果を速報するとともに，例を挙げ，あわせて今後の課題を提示する．

1 逆分岐問題

非線形 Sturm-Liouville 方程式

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)f(x(t))=0, & 0<t<1, \\ x(0)=x(1)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．一般的な枠組み（Crandall-Rabinowitz [1], Rabinowitz [9] 参照）の中で知られていることであるが，$f(x)$ が 0 を含む区間で連続な関数で $f(0)\neq 0$ であるとき，(1.1) の解 $(\lambda, x(t))$ の集合は零解（自明解）の集合 $\{(\lambda,0):\lambda\in\boldsymbol{R}\}$ から，$(\lambda_n,0)$ において分岐する．ただし，ここで $\lambda_n=\frac{(n\pi)^2}{f(0)}$ であり，これは方程式 (1.1) の線形化方程式

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)f(0)=0, & 0<t<1, \\ x(0)=x(1)=0 \end{cases}$$

の固有値である．

関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数であるとき，(1.1) の解 (λ, x) で $x(t)$ が区間 $(0,1)$ において $n-1$ 個の零点をもつものの全体を $\mathcal{S}_n$ と書く．$\mathcal{S}_n$ は一般には連結集合ではない（後の例 2.2 参照）．本論文では，この解集合 $\mathcal{S}_n$ の $\boldsymbol{R}\times C^1_{BC}(0,1)$ における閉包 $\overline{\mathcal{S}_n}$ の $(\lambda_n,0)$ を含む（包含関係に関し）最大の閉連結部分集合を方程式 (1.1) の第 n 分岐という．ただしここで，$C^1_{BC}(0,1)$ は $x(0)=x(1)=0$ をみたす区間 [0,1] における C^1 級関数の全体を表す．(1.1) を含む一般的な Sturm-Liouville 問題に対し，各 $n=1,2,\cdots$ に対し第 n 分岐は非有界集合であることがわかっている（Rabinowitz [9, 10]) 参照）．

以下においては，I を 0 を含む有界閉区間とし，$x \in I$ に対し $f(x) > 0$ であると仮定する．このとき，(1.1) の両辺に $x(t)$ を掛けて部分積分を用いると

$$\int_0^1 x'(t)^2 dt = \lambda \int_0^1 x(t)^2 f(x(t)) dt$$

が得られるから，$\mathcal{S}_1$ の I への制限

$$\mathcal{S}_1^I := \{(\lambda, x(t)) \in \mathcal{S}_1 : x(t) \in I\}$$

における λ は $\lambda > 0$ をみたす．また，通常の初等的な解析により $x(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最大値（または最小値）$h \in I \setminus \{0\}$ を取り，$0 \le t \le \frac{1}{2}$ で

$$t(x) := \pm \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2\lambda \int_\xi^h r f(r) dr}}, \quad |x| \le h \tag{1.2}$$

の逆関数 $x = x(t)$ として定まる．ただし，ここで $\pm$ は h の符号である．$\frac{1}{2} \le t \le 1$ ではこれを $t = \frac{1}{2}$ について対称に与えたものを $x = x(t; h)$ と書けば，$(\lambda, x(t)) \in \mathcal{S}_1^I$ のとき，$x(t) = x(t; h)$, $\exists h \in I \setminus \{0\}$ である．また，$x(\frac{1}{2}; h) = h$ により，$x(t; h)$ に対する λ は

$$\lambda(h) = 2 \left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\int_t^1 s f(hs) ds}} \right)^2. \tag{1.3}$$

で定義される関数 $\lambda(h)$ により $\lambda = \lambda(h)$ と与えられる．この関数 $\lambda(h)$ は I 上の連続関数であり，0 では $\lambda(0) = \frac{\pi^2}{f(0)}$ である．以上により，I 上 $f > 0$ のとき，$\mathcal{S}_1$ の I への制限 $\mathcal{S}_1^I$ は h をパラメータとして $\mathcal{S}_1^I = \{(\lambda(h), x(t; h)) : h \in I \setminus \{0\}\}$ と表される．

関数 f に (1.3) の関数 λ を対応させる写像を分岐変換といい $\mathcal{B}$ で表す：

$$\mathcal{B} : f(x) \mapsto \lambda(h), \qquad (\mathcal{B}f)(h) = 2 \left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\int_t^1 s f(hs) ds}} \right)^2. \tag{1.4}$$

関数 f と集合 $\mathcal{S}_1^I$ の閉包[†]の $\boldsymbol{R}_+ \times I$ への射影 $\overline{\Gamma} := \{(\lambda(h), h) : h \in I\}$ を合わせて書くことにより，$\mathcal{B}$ は Figure 1 で描写される．

本論文で扱う逆分岐問題は，分岐変換の逆変換 $\mathcal{B}^{-1}$ を調べることであり，次を問う：

問題 1.1

(i) （存在）与えられた I 上の正値関数 λ に対し $\mathcal{B}f = \lambda$ となる I 上の正値関数 f は存在するか？

(ii) （一意性）存在するとき各 λ に対し一意か？

(iii) （連続依存性）f は λ に連続的に定まるか？

(iv) （構成）f を λ から復元するアルゴリズムを与えられるか？

[†] $\mathcal{S}_1^I$ に $(\lambda(0), 0)$ を付加した集合．

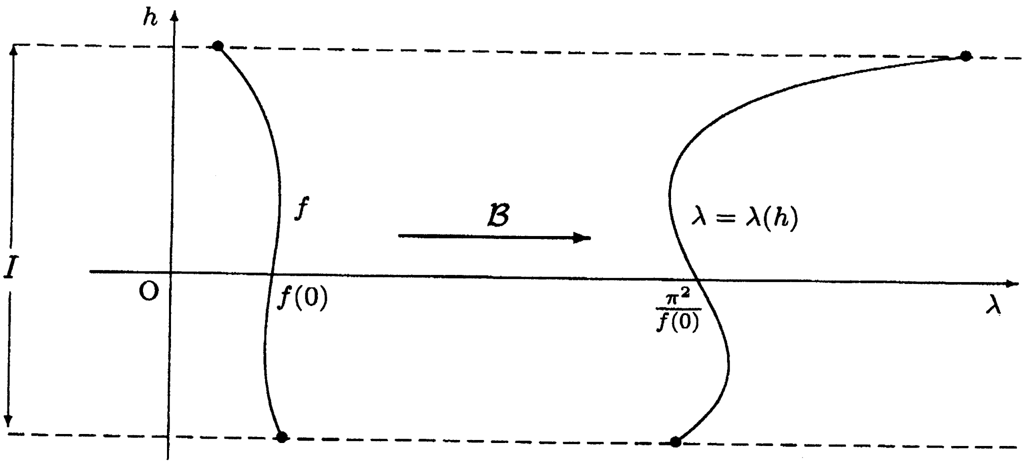

Figure 1: 分岐変換

2 大域的逆分岐定理

問題 1.1 は，換言すれば，$\mathcal{B}$ の逆変換 $\mathcal{B}^{-1}$ が定まるような $\mathcal{B}: X \to Y$ の空間設定が成されるかを問うている．$\lambda(h)$ の定義 (1.3) の右辺の括弧内の形[†]と Fractional Calculus（[11], [7] を参照せよ）からの類推により，$\mathcal{B}$ は関数を $\frac{1}{2}$ だけ滑らかにする（smoothing property）ことが予想される．すなわち，Hölder 空間による空間設定 $C^{k,\alpha} \to C^{k,\alpha+\frac{1}{2}}$ が $X \to Y$ の素地となる．ただし，$h = 0$ においては $hf'(h) \sim |h|^\eta$ $(\eta > 0)$ ならば $h\lambda'(h) \sim |h|^\eta$ であるから，$\mathcal{B}$ は滑らかさを変えない．そのことに注意して，$\phi(h) := f(h) - f(0)$ の住む空間として，

$$\frac{|\phi(h)|}{|h|^\eta} \le \exists M, \quad \frac{|h\phi'(h)|}{|h|^\eta} \le \exists M, \quad |h|^\alpha \frac{h\phi'(h)}{|h|^\eta} \in C^{0,\alpha}$$

をみたす I 上の関数 $\phi \in C^1(I \setminus \{0\})$ の全体を $\mathcal{C}^{1,\alpha}(I)$ とする．すなわち

$$\mathcal{C}^{1,\alpha}(I)_\eta := \Bigg\{ h\phi'(h) \in C(I) : ||\phi||_{1,\alpha,\eta} := \sup_{h \in I\setminus\{0\}} \frac{|\phi(h)|}{|h|^\eta} + \sup_{h \in I\setminus\{0\}} \frac{|h\phi'(h)|}{|h|^\eta} + \sup_{h,k \in I\setminus\{0\}, h\neq k} \frac{\big||h|^{\alpha-\eta} h\phi'(h) - |k|^{\alpha-\eta} k\phi'(k)\big|}{|h-k|^\alpha} < \infty \Bigg\} \tag{2.1}$$

と定義する．$\mathcal{C}^{1,\alpha}(I)_\eta$ は $||\phi||$ をノルムとして Banach 空間となる．定義は若干煩雑であるが，$h = 0$ での挙動を除けば通常の指数 $1 + \alpha$ の Hölder 空間 $C^{1,\alpha}(I)$ に属する関数程度の滑らかさを要請した空間である．そして，$\lambda(h) - \lambda(0)$ の住む空間は上の α を $\alpha + \frac{1}{2}$ に取り替えたものであることがわかる．f および λ そのものが住むべき空間は上の $\mathcal{C}^{1,\alpha}(I)_\eta$ から自然に導入される距離空間

$$\mathcal{M}^{1,\alpha}(I)_\eta := \big\{ f \in C_+(I) \ : \ f(x) - f(0) \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(I)_\eta \big\} \tag{2.2}$$

[†]$2(\cdots)^2$ の部分は"正則"な変換である．

と，このαを$\alpha+\frac{1}{2}$に替えた$\mathcal{M}^{1,\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$である．ただし，ここで，$C_+(I)$は$I$上の正値連続関数の集合を表す．また，空間$\mathcal{M}^{1,\alpha}(I)_\eta$の距離は

$$d(f,g) := |f(0)-g(0)| + \|(f(x)-f(0))-(g(x)-g(0))\|_{1,\alpha,\eta}$$

と定める．空間$\mathcal{M}^{1,\alpha}(I)_\eta$は，$h=0$において$f(h)-f(0)\sim|h|^\eta$ $(\eta>0)$のorderをもつ関数$f(h)$が入るように設定されており，そのとき対応する$\lambda=\lambda(h)$も$h=0$において$\lambda(h)-\lambda(0)\sim|h|^\eta$のorderをもつことに注意しよう．

さて，問題1.1に対する答として，次が得られる：

定理 2.1 ([8]) α,ηが$0<\eta\le\alpha<\frac{1}{2}$をみたすとき，分岐変換$\mathcal{B}$は$\mathcal{M}^{1,\alpha}(I)_\eta$から$\mathcal{M}^{1,\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$の上への位相同型（homeomorphism）になる†.

定理2.1の証明は，[8]で，より一般的な非線形積分方程式に対する形でなされた．$\lambda(h)\in\mathcal{M}^{1,\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$を既知関数とするときの積分方程式(1.3)の解$f\in\mathcal{M}^{1,\alpha}(I)_\eta$の存在を示す部分（問題1.1の(i)に相当）がその中核をなすが，とりわけ，(1) $h=0$の近傍での解の存在証明および，(2) $\lambda(h)$が正値で$C^{1,\alpha+\frac{1}{2}}$のHölder連続性を保持する限り，$h=0$の近傍で得られた解が正値で$C^{1,\alpha}$のHölder連続性を保持して延長されることの証明の2つが骨子となる．このうち，(1)は線形化した方程式をIwasaki-Kamimura[3, 4]で確立された乗法的Wiener-Hopf方程式の理論を用いて解析することによりなされる．また，(2)はKamimura[6]で開発したFractional Calculusの極限解析法（[7, 第3章]も参照せよ）を用いて背理法によりなされる．この際，$\lambda(h)$が$h\neq0$においてC^1級であることは本質的な仮定となる．実際，(2.1)の$h\phi'(h)$をすべて$\phi(h)$に置き換えて††得られる空間$C^{0,\alpha}(I)_\eta$から導入される距離空間$\mathcal{M}^{0,\alpha}(I)_\eta$を用いて$\mathcal{B}:\mathcal{M}^{0,\alpha}(I)_\eta\to\mathcal{M}^{0,\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$とするとき，これはonto写像にならない．この意味で，(2)の部分は繊細である．また，上で述べたように背理法を用いており，したがって問題1.1の(iv)に対する答を与えない．

定理2.1の意味を説明するための例を与える．

例 2.2 $I=[0,B]$, $0<B<\frac{2}{3}$とし，$[0,B]$上の関数$\lambda(h)$を

$$\lambda(h) := \frac{2}{\sqrt{(1-h)(1+3h)}}\times \left(F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{2\sqrt{(1-h)(1+3h)}}{3(1-h)+\sqrt{(1-h)(1+3h)}}},\ \sqrt{\frac{3h-1+\sqrt{(1-h)(1+3h)}}{2\sqrt{(1-h)(1+3h)}}}\right)\right)^2$$

で与える．ただし，ここで$F(\phi,k)$は第1種の（不完全）楕円積分

$$F(\phi,k)=\int_0^\phi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad -\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2},\quad 0\le k^2<1$$

†すなわち$\mathcal{B}:\mathcal{M}^{1,\alpha}(I)_\eta\to\mathcal{M}^{1,\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$は，1対1かつontoであり，$\mathcal{B}$も$\mathcal{B}^{-1}$も距離$d(f,g)$による位相で連続である．

††$k\phi'(k)$も$\phi(k)$とする．

である．容易にわかるように，$\lambda(h)$ は $[0, \frac{2}{3})$ における正値 C^2 級関数であるから，$0 < \eta \leq \alpha < \frac{1}{2}$ をみたす任意の α, η に対し，$\lambda \in \mathcal{M}^{\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$ である．したがって，定理 2.1 により $\mathcal{B}f = \lambda$ なる $f \in \mathcal{M}^{\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$ がただ 1 つ存在する．具体的には，

$$\left(\mathcal{B}^{-1}\lambda\right)(x) = 4(2-3x), \quad 0 \leq x \leq B$$

である．このことは (1.4) により計算を実行してみることで確かめられる．実際，

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}(4(2-3x)))(h) &= \frac{1}{12}\left(\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}-x\right)\right)(h) \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(-t^2+\left(\frac{1}{h}-1\right)t+\left(\frac{1}{h}-1\right))}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(a_+-t)(1-t)(t-a_-)}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2h}\left(\frac{2}{\sqrt{a_+-a_-}}F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{a_+-a_-}{(1-a_-)a_+}}, \sqrt{\frac{1-a_-}{a_+-a_-}}\right)\right)^2 \\
&= \lambda(h)
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$a_\pm := \frac{1-h \pm \sqrt{(1-h)(1+3h)}}{2h}$$

であり，関係式

$$\begin{aligned}
\frac{a_+-a_-}{(1-a_-)a_+} &= \frac{2\sqrt{(1-h)(1+3h)}}{3(1-h)+\sqrt{(1-h)(1+3h)}}, \\
k^2 := \frac{1-a_-}{a_+-a_-} &= \frac{3h-1+\sqrt{(1-h)(1+3h)}}{2\sqrt{(1-h)(1+3h)}},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

および $a > b > x > c$ の時の積分公式

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(t-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)(b-x)}{(b-c)(a-x)}}, \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}\right)$$

を $a = a_+, b = 1, c = a_-, x = 0$ に対し用いた．$0 \leq h < \frac{2}{3}$ のとき，$x'' + \lambda(h)4(2-3x)x = 0$ の $x(0) = x(1) = 0$ をみたす定符号解は (1.2) から，上の積分公式を用いて計算して

$$x(t;h) = \frac{(a_+-a_-)h - (1-a_-)a_+h\,\mathrm{sn}^2((1-2t)\sqrt{\frac{h\lambda(h)}{2}}\sqrt{a_+-a_-},\ k)}{(a_+-a_-) - (1-a_-)\,\mathrm{sn}^2((1-2t)\sqrt{\frac{h\lambda(h)}{2}}\sqrt{a_+-a_-},\ k)}$$

で与えられる．ただし，ここで，$\mathrm{sn}(w,k)$ は (2.3) で定めた k を母数とする Jacobi の楕円関数 sn である．このようにして，与えられた関数 λ は非線形項を決定するので，必然的にすべての解 $x(t;h)$ を決定する．

この例の逆分岐変換をグラフに表すと Figure 2 のようになる．与えられた関数 $\lambda(h)$ は $h \to \frac{2}{3}$ のとき $\lambda(h) \to \infty$ であり，f は $h \to \frac{2}{3}$ のとき零となる．f が $h = \frac{2}{3}$ を越えて滑らかさ $C^{1,\alpha}$ をもつ正値関数ではありえないことは定理 2.1 からの必然の結果である．もし，f が $h = \frac{2}{3}$ を越えて $C^{1,\alpha}$ の正値関数とすると，その $\mathcal{B}$ による像 $\lambda = \mathcal{B}f$ は滑らかさ $C^{1,\alpha+\frac{1}{2}}$ をもつ正値関数でなければならないからである．また，f が $h = \frac{2}{3}$ の手前で滑らかさ $C^{1,\alpha}$ を損わずに零になることもありえない．これも定理 2.1 からの必然の結果である．

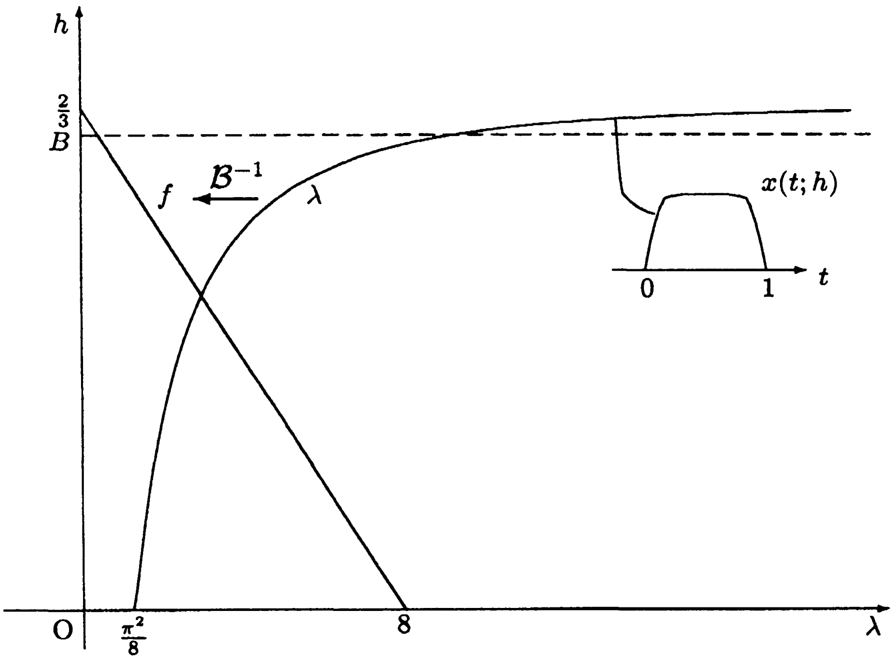

Figure 2: 例 2.2

この例で $f(x)$ がもとから $x \geq \frac{2}{3}$ でも定められているとき，$x \geq \frac{2}{3}$ の f を定める分岐の情報としてどのようなものがありうるかを見てみよう．そのために，上で与えられた関数 $\lambda(h)$ に対する $f = \mathcal{B}^{-1}\lambda$ を $x \geq \frac{2}{3}$ でも $4(2-3x)$ とした f に対する (1.1) の正値解の集合 $\mathcal{S}_1^+ := \{(\lambda, x(t)) \in \mathcal{S}_1 : x(t) \geq 0\}$ を調べてみると，$\mathcal{S}_1^+$ は Figure 2 の曲線[†] $\{(\lambda(h), x(t;h)) : 0 < h < \frac{2}{3}\}$ 以外に $\lambda < 0$ のときに

$$\lambda_*(h) := -\frac{1}{2\sqrt{h(3h-2)}}\left(F\left(-\cos^{-1}\left(\frac{-h+\sqrt{h(3h-2)}}{h+\sqrt{h(3h-2)}}\right), k_*\right)\right)^2,$$

$$x_*(t;h) := h + \sqrt{h(3h-2)} - \frac{2\sqrt{h(3h-2)}}{\mathrm{cn}\left((2t-1)\sqrt{-2\lambda_*(h)\sqrt{h(3h-2)}},\ k_*\right)+1}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

[†] $\boldsymbol{R} \times C^1_{BC}(0,1)$ における曲線

で定義される関数の組による曲線 $\{(\lambda_*(h), x_*(t;h)), h > 1\}$ がもう1つの連結成分として現れることがわかる[†]．ただし，ここで，$\mathrm{cn}(w, k_*)$ は次の k_* を母数とする Jacobi の楕円関数 cn を表す．

$$k_* := \sqrt{\frac{3h-1+2\sqrt{h(3h-2)}}{4\sqrt{h(3h-2)}}}.$$

このことは，(1.2) で $\lambda < 0$ のときの

$$t = t(x) = \sqrt{-\frac{1}{8\lambda}} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{u^2(1-u) - h^2(1-h)}}$$

に積分公式

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)((t-p)^2+q^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{r}} F\left(-\cos^{-1}\left(\frac{x-1+r}{-x+1+r}\right), k_*\right)$$

を適用することにより確かめられる．ただし，この公式において

$$r := \sqrt{(1-p)^2+q^2}, \quad k_* := \sqrt{\frac{1-p+r}{2r}}$$

である．

以上により，$f = \mathcal{B}^{-1}\lambda$ の線形延長 $f(x) = 4(2-3x)$ に対する (1.1) の正値解の集合 $\mathcal{S}_1^+$ は2つの曲線 $\{(\lambda(h), x(t;h)) : 0 < h < \frac{2}{3}\}$ と $\{(\lambda_*(h), x_*(t;h) : h > 1\}$ の和集合になる．この全体像は Figure 3 で描かれる．このような，$f < 0$ の場合も込めての $\mathcal{S}_1$ の $\boldsymbol{R}^2$ への射影からの f の復元は今後の課題の1つとなる．

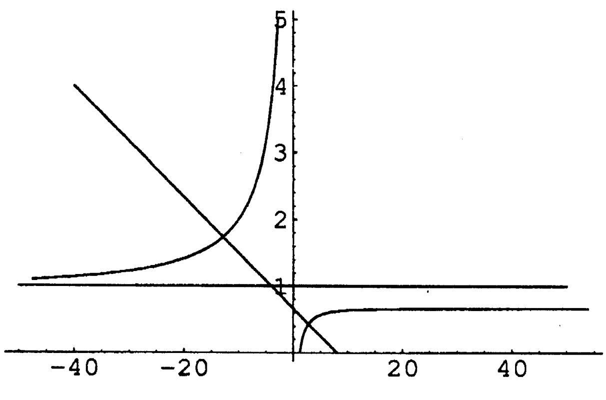

Figure 3: $f(u) = 4(2-3u)$ に対する解集合

[†] f の延長の仕方によっては他の連結成分が現れないこともある．例えば，$|h| < \pi$ における $\lambda(h) := (K(\sin\frac{h}{2}))^2$ の逆分岐変換 $f = \mathcal{B}^{-1}\lambda$ は $f(x) = 4^{\frac{\sin x}{x}}$，$|x| < \pi$ であるが，この f を $\boldsymbol{R}$ 上の関数とみたときの $\mathcal{S}_1$ は $\{(\lambda(h), x(t;h))\}$ で尽きている．ただし，ここで $x(t;h) := 2\sin^{-1}(\sin\frac{h}{2}\,\mathrm{sn}(2K(\sin\frac{h}{2})t, \sin\frac{h}{2}))$．

3　逆分岐変換の計算法

前節で述べたように，定理 2.1 は分岐逆変換の計算法に言及しない．本節では，関数 $\lambda = \lambda(h) \in \mathcal{M}^{1,\alpha+\frac{1}{2}}(I)_\eta$ が与えられたときに λ の逆分岐変換 $\mathcal{B}^{-1}\lambda$ を求める 1 つの方法を述べる．以下において $I = [0, B]$，$B > 0$ とする．

まず，$F(x) := \int_0^x \xi f(\xi) d\xi$，$0 \le x \le B$ とするとき，$\mathcal{B}f = \lambda$ は

$$\int_0^h \frac{d\xi}{\sqrt{F(h) - F(\xi)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\lambda(h)}, \qquad 0 \le h \le B \tag{3.1}$$

と同値であることに注意する．$f > 0$ より $F(x)$ は（$x = 0$ 以外で正の）単調増加関数であり，したがって，$y = F(x)$ は逆関数 $x = G(y)$ （$G(y)$ の定義域は $0 \le y \le F(B) = \int_0^B vf(v)dv$）をもつ．したがって，(3.1) を $\eta = F(\xi)$ で置換して

$$\int_0^{F(h)} \frac{G'(\eta)}{\sqrt{F(h) - \eta}} d\eta = \sqrt{\frac{1}{2}\lambda(h)}, \qquad 0 \le h \le B$$

となる．すなわち，$y = F(h)$ として

$$\int_0^y \frac{G'(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} d\eta = \sqrt{\frac{1}{2}\lambda(G(y))}, \qquad 0 \le y \le C \tag{3.2}$$

が得られる．ただし，ここで $C := F(B)$ とおいた．$x \to 0$ のとき $F(x) \sim$ 正定数 $\times x^2$ であるから，$y \to 0$ のとき，$G(y) \sim$ 正定数 $\times\sqrt{y}$ である．

逆に，ある定数 $C > 0$ に対し，$(0, C]$ 上の微分可能な（$y = 0$ 以外で正の）単調増加関数 $x = G(y)$ で $y \to 0$ のとき，$G(y) \sim$ 正定数 $\times\sqrt{y}$ となっている関数 $G(y)$ が $\lambda(h)$ に対し (3.2) をみたすとすると，$x = G(y)$ の逆関数 $F(x)$ （$F(x)$ の定義域は $0 \le x \le B = G(C)$）は (3.1) をみたし，したがって，$f(x) := F'(x)/x$ は $\mathcal{B}f = \lambda$ をみたす．すなわち，$f = \mathcal{B}^{-1}\lambda$ となる†．

例 3.1　関数 $\lambda(h) = 2(h+1)^2$，$h \ge 0$ の逆分岐変換 $\mathcal{B}^{-1}\lambda$ を求めてみよう．このとき，(3.2) は

$$\int_0^y \frac{G'(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} d\eta = G(y) + 1 \tag{3.3}$$

となる．これより

$$\frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{y-z}} \int_0^z \frac{G'(\eta)}{\sqrt{z-\eta}} d\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{G(z)}{\sqrt{y-z}} dz + \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{y-z}}$$

である††が，左辺は $\int_0^y G'(\eta)d\eta$ に等しいので，$G(0) = 0$ を考慮して

$$G(y) - \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{G(z)}{\sqrt{y-z}} dz = \frac{2}{\pi}\sqrt{y} \tag{3.4}$$

$^\dagger f(G(y)) = (G(y)G'(y))^{-1}$ であることに注意．また，(1.1) の非線形項 $xf(x)$ は $F'(x)$ で与えられる．

††Abel の積分方程式を解くのと同じ方法（たとえば [7, 第 1 章] を参照）であり，$\frac{1}{2}$ 回積分することに相当する．

が得られる．この方程式は第 2 種 Volterra 積分方程式であり，積分作用素 K を

$$(K\varphi)(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{\varphi(z)}{\sqrt{y-z}}dz$$

で定義するとき，$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{y}\right)$ と解かれる†．K^n は具体的に計算ができて

$$(K^n\varphi)(y) = \frac{c_n}{\pi}\int_0^y (y-\eta)^{\frac{n}{2}-1}\varphi(\eta)d\eta, \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi^{j-1}}\frac{1}{(j-1)!}, & n=2j, \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{j-1}\frac{1}{(2j-3)!!}, & n=2j-1 \end{cases}$$

となるので

$$\begin{aligned} G(y) &= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^y (y-\eta)^{\frac{n}{2}-1}\eta^{\frac{1}{2}}d\eta = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n B\left(\frac{3}{2},\frac{n}{2}\right)y^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2}c_{2j-1}B\left(\frac{3}{2},\frac{2j-1}{2}\right)y^j + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{\pi^2}c_{2j}B\left(\frac{3}{2},j\right)y^{j+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{y}{\pi}\right)^j + \frac{2}{\pi}\sqrt{y}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!!}\left(\frac{2}{\pi}y\right)^j \end{aligned}$$

と計算される††．したがって，Kummer の合流形超幾何関数

$${}_1F_1(1,\tfrac{3}{2};z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!!}(2z)^j = \frac{1}{2}e^z\sqrt{\frac{\pi}{z}}\,\mathrm{Erf}\sqrt{z} \quad \left(\mathrm{Erf}\,z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt\right)$$

を用いて

$$G(y) = e^{\frac{y}{\pi}} - 1 + \frac{2}{\pi}\sqrt{y}\,{}_1F_1(1,\tfrac{3}{2};\tfrac{y}{\pi}) = e^{\frac{y}{\pi}}\left(1+\mathrm{Erf}\sqrt{\tfrac{y}{\pi}}\right) - 1$$

と書ける．$G(y)$ は任意の $C>0$ に対し $[0,C]$ 上の単調増加関数で $G(y) \sim \frac{2}{\pi}$ $(y \to 0)$ をみたす．関数

$$w = e^z\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}ds\right)$$

の逆関数を $z = \ell(y)$ で表すと $F(x) = \pi\,\ell(x+1)$ が G の逆関数となる．これより，$f(x) = F'(x)/x$ とすると任意の $B>0$ に対し $f \in \mathcal{M}^{1,\alpha}[0,B]_I$ である．このようにして $f = \mathcal{B}^{-1}\lambda$ が決定される．f のグラフは $\{((G(y)G'(y))^{-1}, G(y)) : 0 \le y \le C\}$ で与えられる．これを描いたものが次頁の Figure 4 である．

なお，この例の f による $xf(x)$ は周期 T と振幅 A が 1 次関係 $T = 2(A+1)$ をもつ非線形振動の非線形項を与える．

---

†たとえば [7, 第 2 章] 参照.

††$B(\cdot,\cdot)$ は Beta 関数

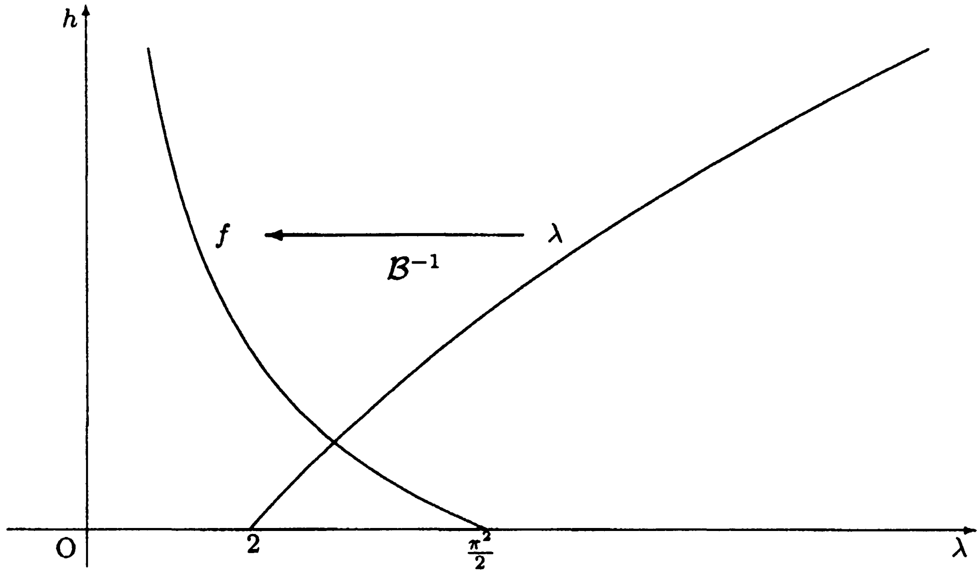

Figure 4: $\lambda(h) = 2(h+1)^2$ のとき.

例 3.2 関数 λ を $\lambda = \lambda(h) = 2\left(2-\sqrt{1-h}\right)^2$, $(0 \le h < 1)$ で与える. このとき, (3.2) は

$$\int_0^y \frac{G'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 2 - \sqrt{1-G(y)}$$

となる. $0 \le y \le C$ で $0 \le G(y) \le 1$ であり, そこにおいて $G(y)$ が単調増加であるような G を求めたい. $\sqrt{1-G(y)} = H(y)$ と変換すると $0 \le y \le C$ で $0 \le H(y) \le 1$ であり, そこにおいて $H(y)$ は単調減少であり

$$H(y) - 2\int_0^y \frac{H(\eta)H'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 2$$

となる. (3.3) から (3.4) を導いたのと同様の計算をして

$$H(y)^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{H(z)}{\sqrt{y-z}} dz = 1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{y} \tag{3.5}$$

が得られる.

補助定理 3.3 積分方程式 (3.5) は $[0, \exists y_*]$ $(y_* > 0)$ で $0 \le H(y) \le 1$ をみたす連続解をただ 1 つもつ. 解 $H(y)$ は漸化式

$$H_0(y) = 1,$$
$$H_n(y) = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{H_{n-1}(z)}{\sqrt{y-z}} dz + 1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{y}\right)^{1/2}, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{3.6}$$

で定まる単調減少関数列 $\{H_n(y)\}$ の極限として得られ, $(0, y_*)$ で微分可能で $H'(y) < 0$ をみたす.

証明 $H(y)$ と $\tilde{H}(y)$ を $[0, y_*)$ で定義された (3.5) の正値解とすると，

$$\tilde{H}(y)^2 - H(y)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{\tilde{H}(z) - H(z)}{\sqrt{y-z}}dz \le 0, \qquad 0 \le y < y_*$$

が成り立つ．よって，$\tilde{H}(y), H(y) \ge m > 0$ のとき

$$2m\left|\tilde{H}(y) - H(y)\right| \le \int_0^y \frac{\left|\tilde{H}(z) - H(z)\right|}{\sqrt{y-z}}dz$$

となる．これに Gronwall 型の不等式（[7][補題 2.6] 参照）を適用して $\tilde{H}(z) - H(z) = 0$ が得られる．

さて，逐次近似 (3.6) で関数列 $\{H_n(y)\}$ を定義する．ただし，$H_n(y)$ を (3.6) の右辺の括弧内が非負の範囲 $0 \le y \le y_n$ で定義し，便宜上，$y \ge y_n$ では $H_n(y) = 0$ とする．$H_1(y)$ を計算すると

$$H_1(y) = \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{y}}, \quad 0 \le y \le y_1 := \frac{\pi^2}{4}, \qquad H_1(y) = 0, \quad y \ge y_1$$

である．明らかに $H_1(y) \le H_0(y)$ である．いま，$H_n(y) \le H_{n-1}(y)$ を帰納法の仮定とすると、

$$H_{n+1}(y)^2 - H_n(y)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{H_n(z) - H_{n-1}(z)}{\sqrt{y-z}}dz \le 0, \qquad 0 \le y \le y_n$$

により $H_{n+1}(y) \le H_n(y)$ がしたがう．よって $y_{n+1} \le y_n$ も得られる．これより，数列 $\{y_n\}$ および $y \ge 0$ における関数列 $\{H_n(y)\}$ は n について単調減少である．一方，漸化式 (3.6) において括弧内の第 1 項（積分項）は非負であるから $H_n(y)^2 \ge 1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{y}$ $(0 \le y \le \frac{\pi^2}{16})$ である．よって，$H_L(y)$ を

$$H_L(y) = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{y}}, \quad 0 \le y \le y_L := \frac{\pi^2}{16}, \qquad H_L(y) = 0, \quad y \ge y_L$$

で定義するとき，任意の n に対し $H_n(y) \ge H_L(y)$ および $y_n \ge y_L$ がしたがう．こうして，数列 $\{y_n\}$ および関数列 $\{H_n(y)\}$ は単調減少で下に有界であることが示され，よって，関数列 $\{H_n(y)\}$ の極限 $H(y) := \lim_{n\to\infty} H_n(x)$ が存在する．$y_* := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ とするとき $H(y)$ は $[0, x_*]$ で定義されそこにおいて (3.5) をみたす．$H(y)$ は $[0, x_*)$ で正値であり，y_* で零になる．

$H_n(x)$ を $0 < y < y_*$ で微分可能と仮定すると

$$H_{n+1}(y)^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^y H_n'(z)\sqrt{y-z}\,dz + 1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{y} \tag{3.7}$$

となり $H_{n+1}(x)$ もそこで微分可能であることがわかり，さらにそこで $H_n'(y) < 0$ と仮定すると上を微分して $H_{n+1}'(y) < 0$ であることがわかる．したがって，帰納法により，

$H_n(x)$ は $(0, y_*)$ で微分可能で $H'_n(x) < 0$ である．また，$0 < y < y_*$ に対し (3.7) を微分して $n+1$ を n に変えたものとを辺々引き算して $H(y) \leq H_n(y)$ を用いて

$$\begin{aligned} H(y)(H'_{n+1}(y) - H'_n(y)) &\leq H_{n+1}(y)H'_{n+1}(y) - H_n(y)H'_n(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^y \frac{H'_n(z) - H'_{n-1}(z)}{\sqrt{y-z}} dz \end{aligned}$$

が得られ，これより $H'_n(y)$ は $[0, y_*]$ において広義一様収束することが示される．したがって，$H(y)$ は $(0, y_*)$ で微分可能である．また，(3.5) を (3.7) を得たのと同様にして変形して微分することにより $(0, y_*)$ において $H'(y) < 0$ となることが示される．証明終．

積分方程式 (3.5) の解 $H(y)$ は $\sqrt{y}$ のべき級数として

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{\frac{n}{2}} \tag{3.8}$$

と表示される．係数 $\{a_n\}$ は

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_n = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} + \frac{1}{2\pi}B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

で帰納的に定まる．容易にわかるように，$n \geq 1$ に対し $a_n < 0$ である．このべき級数の係数 a_n を

$$\sqrt{1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{y}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{\frac{n}{2}}, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad b_n := -\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \frac{(2n-1)!!}{n!}, \quad n \geq 2$$

の係数 b_n と比較すると，$n \geq 1$ に対し $2|a_n| \leq |b_n|$ が成り立つ．実際 $2|a_i| \leq |b_i|$ が $i = 1, 2, \cdots, n-1$ で成り立っているとすると，$n \geq 2$ に対し $\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} = -2b_n$ および $B(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}) \leq \frac{2(2n-1)}{n}$ が成り立つことに注意して，$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 2|a_n| &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} + \frac{1}{\pi}B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)|a_{n-1}| \\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} + \frac{1}{2\pi}\frac{2(2n-1)}{n}|b_{n-1}| \\ &= -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{\pi}\frac{(2n-1)}{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} = -b_n \end{aligned}$$

となるから，$2|a_n| \leq |b_n|$ がしたがう．これより

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\frac{k}{2}} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{y}}$$

となるので $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\frac{k}{2}}$ は単調（減少）に (3.8) の $H(y)$ に収束する．そして，係数 $\{a_n\}$ の作り方から $H(y)$ は $y \le y_*$ において (3.5) をみたす．

したがって，(3.8) より，

$$
\begin{aligned}
G(y) := 1 - H(y)^2 &= \frac{2}{\pi} y^{\frac{1}{2}} - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n-i} \right) y^{\frac{n}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi} y^{\frac{1}{2}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) a_{n-1} y^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

となり，$G(y)$ が求まる．しかしながら，この例に対する f が B の限界である $h = 1$ においてどのような挙動をするのかを調べるには，別の解析が必要となる．

References

[1] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal. **8** (1971), 321–340.

[2] K. Iwasaki and Y. Kamimura, *An inverse bifurcation problem and an integral equation of the Abel type*, Inverse Problems **13** (1997), 1015–1031.

[3] K. Iwasaki and Y. Kamimura, *Convolution calculus for a class of singular Volterra integral equations*, J. Integral Eqs. Appl. **11** (1999), 461–499.

[4] K. Iwasaki and Y. Kamimura, *Inverse bifurcation problem, singular Wiener-Hopf equations, and mathematical ecology*, J. Math. Biol. **43** (2001), 101–143.

[5] Y. Kamimura, *An inverse bifurcation problem in bifurcation theory*, J. Diff. Eq. **106** (1993), 10–26.

[6] Y. Kamimura, *Conductivity identification in the heat equation by the heat flux*, J. Math. Anal. Appl. **235** (1999), 192–216.

[7] 上村　豊，積分方程式　–逆問題の視点から–，共立出版，2001.

[8] Y. Kamimura, *A nonlinear integral transform and a global inverse scattering theory*, submitted.

[9] P.H. Rabinowitz, *Nonlinear Sturm-Liouville problem for second order ordinary differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 939–961.

[10] P.H. Rabinowitz, *A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications*, Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wis., 1971), pp.11-36. Academic Press, New York, 1971.

[11] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach, Switzerland, 1993.